Kubisch, quartisch und so weiter

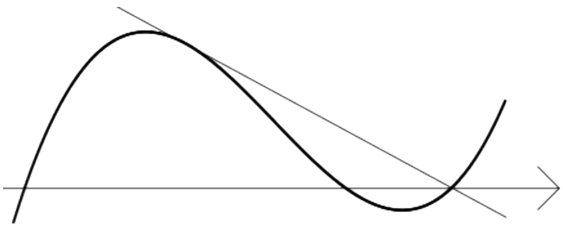
J. Meyer
(Hameln)

J.M.Meyer@t-online.de

Abstract: Eine bekannte Aufgabe zu kubischen Funktionen wird in verschiedenen Hinsichten auf Funktionen höheren Grades verallgemeinert.

Die folgende Aufgabe (nach Henn 2000; S. 31 f.) ist weithin bekannt:

Gegeben sei eine kubische Funktion mit drei reellen Nullstellen a, b und c. Die Tangente an der Stelle $(a+b)/2$ hat c als Nullstelle:



Wie lässt sich dieser – mit einem CAS einfach und schnell zu begründende – Sachverhalt auf Funktionen höheren Grades verallgemeinern? Beim Entdecken hilft GeoGebra und beim Begründen ein CAS.

1. Eine *erste Verallgemeinerung* geht aus vom umgekehrten Sachverhalt: Die durch den Punkt $(c, 0)$ verlaufende Tangente an den Graphen hat $(a+b)/2$ als Berührstelle.

Dies lässt sich leicht auf Funktionen vom Grad 4 verallgemeinern: Hat eine solche die reellen (möglicherweise zusammenfallenden) Nullstellen a, b, c und d, also die Gestalt

$$f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,,$$

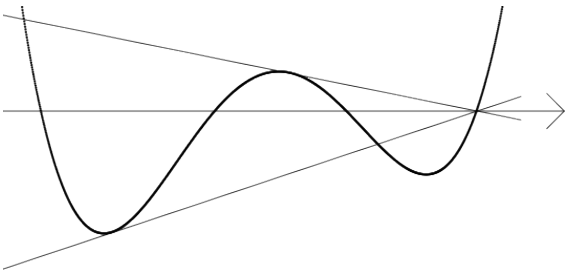
so hat die Tangente an der Stelle s die Gleichung

$$t(x) = f'(s)(x-s) + f(s)$$

und damit die Nullstelle $s - f(s)/f'(s)$. Diese stimmt genau dann mit d überein, wenn s die Gleichung

$$(s-d)^2(3s^2 + 2s\sigma_1 + \sigma_2) = 0$$

erfüllt; dabei seien $\sigma_1 = -(a+b+c)$ und $\sigma_2 = ab+bc+ca$ die elementar-symmetrischen Funktionen zu a, b, c. Es gibt somit zwei Stellen, an denen die zugehörige Kurventangente die Nullstelle d hat:



Wie sieht es aus mit Kurven vom Grad 5 und den reellen Nullstellen $a, \ldots, e$? Analoge Betrachtungen führen auf

$$s = (x-e)^2(4s^3 + 3s^2\sigma_1 + 2s\sigma_2 + \sigma_3)$$

mit den entsprechenden elementar-symmetrischen Funktionen.

Man erkennt das Bildungsgesetz: Hat eine Funktion die reellen Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und bezeichnet σ_i die zu i Faktoren gehörige elementar-symmetrische Funktion zu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit dem Vorzeichen $(-1)^i$, so hat die durch den Punkt $(a_n, 0)$ verlaufende Tangente an den Graphen die Nullstellen von

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)s^{n-i-1}\sigma_{i-1} = 0$$

als Berührstellen; dabei sei $\sigma_0 = 1$.

Das ist auch leicht einzusehen: Zu lösen ist $s - a_n = f(s)/f'(s)$. Wegen

$$f(s) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i s^{n-1-i}\right)(s-a_n)$$

und daher

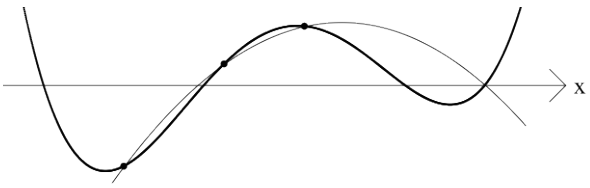
$$f'(s) = \left(\sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i)\sigma_i s^{n-2-i}\right)(s-a_n) + \frac{f(s)}{s-a_n}$$

lässt sich die zu lösende Gleichung umformen zu

$$\left(\sum_{i=0}^{n-2}(n-1-i)\sigma_i s^{n-2-i}\right)(s-a_n)^2 = 0\,,$$

was zu zeigen war.

2. Eine zweite Verallgemeinerung geht von den arithmetischen Mitteln der Nullstellen aus. Eine kubische Funktion hat zu den Nullstellen a und b nur ein einziges arithmetisches Mittel; als ausgezeichnete Kurve kommt hier nur die Tangente in Betracht. Eine Funktion vom Grad 4 hat zu den drei Nullstellen a, b und c drei arithmetische Mittel; als ausgezeichnete Kurve durch die drei zugehörigen Punkte kommt die Parabel in Betracht, die durch eben diese drei Punkte verläuft. Man stellt fest und verifiziert mithilfe eines CAS, dass die Parabel tatsächlich d als Nullstelle hat:

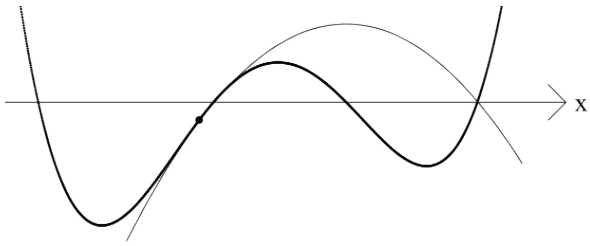


Hier ist eine Verallgemeinerung auf höhere Grade nicht mehr sinnvoll: Eine Funktion vom Grad 5 hat zu vier Nullstellen sechs verschiedene arithmetische Mittel, das zugehörige Interpolationspolynom daher den Grad 5. Folglich stimmt es mit dem Ausgangspolynom überein.

Eine Funktion vom Grad 6 hat zu fünf Nullstellen zehn verschiedene arithmetische Mittel, das zugehörige Interpolationspolynom hätte also den Grad 9. Da aber alle zu den arithmetischen Mitteln gehörigen Punkte auf der Ausgangskurve liegen, hat das Interpolationspolynom nur den Grad 6 und stimmt mit dem Ausgangspolynom überein.

Offensichtlich kann man für höhere Grade auch so argumentieren.

3. Eine dritte Verallgemeinerung geht von den arithmetischen Mitteln der Nullstellen aus. Eine Funktion mit 4 reellen Nullstellen hat zu drei Nullstellen ein einziges arithmetisches Mittel. Der zugehörige Punkt auf der Kurve hat als ausgezeichnete Kurve die Schmiegeparabel, die mit der Originalkurve die 0., 1. und 2. Ableitung gemeinsam hat. Die Schmiegeparabel verläuft durch die 4. Nullstelle der Ausgangsfunktion:



Allgemeine Begründung für höhere Grade: Man kann das Koordinatensystem so verschieben und strecken, dass die $n-1$ Nullstellen $a_1, a_2, \dots, a_n$ als arithmetisches Mittel 0 haben und dass $a_n = 1$ ist. Dann ist die Schmiegekurve das Taylorpolynom p an der Stelle 0 vom Grad $n-2$.

Wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-3}+\cdots+\sigma_{n-1}\right)(x-1) \\ &= x^n+\sigma_2 x^{n-2}+\cdots+\sigma_{n-1}x \\ &\quad -\left(x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-3}+\cdots+\sigma_{n-1}\right) \end{aligned}$$

ist die Schmiegekurve gegeben durch

$$p(x) = \sigma_2 x^{n-2}+\cdots+\sigma_{n-1}x-\left(\sigma_2 x^{n-3}+\cdots+\sigma_{n-1}\right);$$

sie hat die Eigenschaft

$$p(1) = \sigma_2+\cdots+\sigma_{n-1}-\left(\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-1}\right) = 0\,,$$

was zu zeigen war.

Literatur

[1] Henn, H.-W. (2000): Analysisunterricht im Aufbruch. In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 46, Heft 4–5, S. 26–45.